# TARTALMI KERETEK A MATEMATIKA DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉHEZ

*Szerkesztette:*
*Csapó Benő és Szendrei Mária*

NEMZETI TANKÖNYVKIADÓ

# Tartalmi keretek
# a matematika diagnosztikus értékeléséhez

# TARTALMI KERETEK A MATEMATIKA DIAGNOSZTIKUS ÉRTÉKELÉSÉHEZ

Szerkesztette
Csapó Benő
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet
és
Szendrei Mária
Szegedi Tudományegyetem Algebra és Számelmélet Tanszék

Nemzeti Tankönyvkiadó
Budapest

Diagnosztikus mérések fejlesztése
Projekt azonosító: TÁMOP 3.1.9-08/1-2009-0001

Nemzeti Fejlesztési Ügynökség
www.ujszechenyiterv.gov.hu
06 40 638 638

MAGYARORSZÁG MEGÚJUL

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Szerzők:

Csapó Benő, Csíkos Csaba, Gábri Katalin, Lajos Józsefné,
Makara Ágnes, Terezinha Nunes, Szendrei Julianna, Szendrei Mária,
Szitányi Judit, Lieven Verschaffel, Zsinkó Erzsébet

A kötet fejezeteit lektorálta:

Kosztolányi József és Vancsó Ödön

ISBN 978-963-19-7211-5



Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.
a Sanoma company

www.ntk.hu • Vevőszolgálat: info@ntk.hu • Telefon: 06-80-200-788

A kiadásért felel: Kiss János Tamás vezérigazgató
Raktári szám: 42686 • Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Felelős szerkesztő: Szilágyi Edit • Műszaki szerkesztő: Dobó Nándor
Terjedelem: 29,67 (A/5) ív • Első kiadás, 2011

# 2.

# A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása

***Csíkos Csaba***
Szegedi Tudományegyetem Neveléstudományi Intézet

***Lieven Verschaffel***
Katholieke Universiteit Leuven Institute of Education

A matematikatanulás célját leginkább az általános társadalmi elvárások, valamint az egyéb diszciplínák, különösen a többi tudományterület igényei alakítják. A matematika mint tudományág és mint iskolai tantárgy alakíthatja a diákok gondolkodását, hogy kialakuljon bennük az igény a matematikai tudás alkalmazására más iskolai tantárgyakban, vagy a mindennapi, iskolán kívüli problémák megoldásában.

Az elképzelés, hogy leírjuk az iskolában megszerzett matematikatudás különböző összefüggésekre és problématerületekre való alkalmazhatóságát, egyidős a matematikai fogalmak megjelenésével. Ezért ebben a fejezetben elsőként röviden bemutatjuk a matematikai tudás alkalmazásának általános elméleti alapjait. Az elmúlt évszázadok során az európai iskolarendszerek többségében a matematika mint iskolai tantárgy központi szerepre tett szert a tananyagban. A *Ratio Studiorum* óta, amikor *Christopher Clavius* latba vetette befolyását, hogy a matematikát a normál jezsuita alaptanterv részévé tegye (lásd *Smolarski*, 2002), egészen a mai európai alaptantervekig folyamatosan kutatják a matematikatanítás és -tanulás jobbításának útjait. A fejezet második részében a matematikai tudás alkalmazásának értékelési szempontjaira összpontosítunk.

A fejezet harmadik részében a tantermi matematika jellemzőit és szerepét elemezzük, különös tekintettel a szöveges feladatokra. A tanulók nézeteit a világ különböző problémáinak megközelítéséről leginkább a tantermi gyakorlat és az osztálytermi kultúra alakítja. Végezetül a matematikai tudás diagnosztikai értékelési szempontjait is tekintetbe véve kategorizáljuk a matematikai szöveges feladatokat.

## Elméleti megfontolások

A matematika és a matematikaoktatás történetét végigkíséri a törekvés, hogy igazolják a matematika fontosságát a mindennapi élet és a többi tudományág szempontjából. Az ilyen irányú erőfeszítéseket sokszor gátolta a matematika kettős természete: kettősség figyelhető meg ugyanis abban, ahogyan a matematikai eredményeket publikálják és kommunikálják, és ahogyan a matematikai gondolkodás és felfedezések ténylegesen megvalósulnak.

### *A matematikai gondolkodás természete*

A matematikát gyakran azonosítják a definíciók, tételek és bizonyítások egymásutánjával. A matematikai közlemények az ókor óta mindig szigorú szabályokat követtek az eredmények bemutatásában. Ezek a szabályok alapvetően a deduktív következtetések szabályai. Sok matematikai publikáció szerkezete még ma is a definíció – tétel – bizonyítás sorrendet követi. Ugyanakkor *Descartes* már a 17. században azt állította, hogy az ókori görögök a tételeikhez induktív úton jutottak el, eredményeiket azonban szigorúan deduktív szabályok szerint tették közzé. A teorémák bemutatásában és az azokhoz való eljutásban rejlő kettősség a laikust is megtévesztheti, aki a matematikust olyan embernek tartja, aki megalkotja a tételt, majd bebizonyítja azt. Mindazonáltal *Rickart* (1996) – *Poincaré* és *Hadamard* nyomán – hangsúlyozza, hogy a kreativitás alapvető szerepet játszik a matematikai felfedezésekben. A matematikában a tudatos, kemény munka és a kreatív tapasztalatok együttese hoz eredményt. Bár a matematikai gondolkodás különböző aspektusai összekapcsolódnak a matematikai tevékenységekben, a megoldandó feladattól függően egyik vagy másik jobban előtérbe kerülhet. „A szakmán belül még mi magunk is elméleti szakemberként, illetve problémamegoldóként osztályozzuk magunkat" (*Guy*, 1981, vii. o.). *Ernest* (1999) szerint az oktatás szempontjából egyensúlyt kell teremteni a verbálisan megfogalmazható, explicit és a szavakkal nem megfogalmazott, implicit matematikai tudás között.

*Freudenthal* munkásságában található meg a kulcs annak megértéséhez, hogy az iskolai matematika hogyan tükrözi vissza a különböző filozófiai megközelítéseket. A diákoknak az iskolában elsődlegesen a matematikai tevékenységeket, a matematika művelését kell megtanulniuk, és nem azt, hogy készen elfogadják a matematikusok tevékenységének eredményét. A matematika művelése a diákoktól elsősorban tapasztalatszerzést, hipotézisek felállítását, és mindenekelőtt a matematikai gondolkodás elsajátítását követeli meg. „A tanulónak inkább a matematikai gondolkodást és nem a matematikát; inkább az elvonatkoztatást és nem az absztrakt fogalmakat; inkább a sematizálást és nem a sémákat; inkább a megfogalmazást és nem a fogalmakat; inkább az algoritmizálást és nem az algoritmusokat; inkább a szóbeli kifejezést és nem a nyelvet … kell újra felfedeznie" (*Freudenthal*, 1991, 49. o.). A matematikaórákon a történelmileg kialakult DTP (definition – theorem – proof; definíció – tétel – bizonyítás) sorrenddel szemben egyfajta megfordított sorrendet érdemes alkalmazni: felfedezés, magyarázat, formalizálás (*Hodgson* és *Morandi*, 1996).

### *A matematikai modellezési perspektíva*

„A 20. század elején a matematikaoktatás mint új tudományág megjelenésének nyilvánvaló politikai motivációi voltak" (*Sriraman* és *Törner*, 2008, 668. o.). A különböző mozgalmak fő támogatóit gazdasági szempontok vezérelték. A 20. században két olyan matematikai oktatási mozgalom van, amely még napjaink matematikaoktatásának elméletére és gyakorlatára is jelentős hatással van.

Az *Új matematika* (*New Math*) mozgalom célja, hogy absztrakt fogalmakon keresztül hangsúlyozza a matematikai struktúrákat. A *Bourbaki-csoport* munkája nyomán az Új matematika mozgalom erősen formalizált tankönyveket jelentetett meg, kezdeményezte az iskolai tanterv és a tanárképzés reformját. Az Új Matematika a *miérteket* és a matematika mélyebb struktúráját hangsúlyozta a hagyományos matematikatanítás értelem nélküli merevségével szemben (*Sriraman* és *Törner*, 2008). Ezért érdemes a mozgalmat pozitívabban értékelni, és nem csupán a posztmodern matematikaoktatás szemszögéből kritizálni. Ez a mozgalom kezdeményezte a matematikai és a pszichológiai (a *piaget*-i értelemben vett hipotetikus-deduktív) struktúrák közötti hasonlóságok tanulmányozását is.

A realisztikus matematikaoktatás (*Realistic Mathematics Education* – RME) „egyaránt választ jelentett az amerikai Új matematika mozgalomra … és az akkor uralkodó holland … mechanisztikus matematikaoktatásra is." (*van den Heuvel-Panhuizen,* 2001, 1. o.). Az RME *Hans Freudenthal* kezdeményezéseiből nőtt ki: a *Wiskobas* projekttel (hollandul: „matematika az általános iskolában"), majd később a Freudenthal Intézet megalapításával, valamint a matematika oktatás olyan gondolatokkal való megtermékenyítésével, mint pl. hogy a diákok maguk fejlesszék a számukra jelentéssel bíró fogalmakat és eszközöket, amelyeket a hétköznapi problémák kezelésére alkalmaznak (*van den Heuvel-Panhuzien*, 2003). Ahogy *Freudenthal* fenti idézete már rámutatott: a realisztikus matematikaoktatás célja, hogy a gyerekek saját maguk építsék fel matematikai tudásukat. Az RME hangsúlyozza egyrészt a matematikai struktúrán belüli matematikai tevékenységek, másrészt pedig a megszerzett tudás és különböző kontextusok közötti matematikai kapcsolatok megteremtését (lásd *Treffers*, 1993; *Wubbels*, *Korthagen* és *Broekman*, 1997). Mivel a 'realisztikus' jelző fordítása más nyelvekhez hasonlóan az angol nyelvben is a 'realitáshoz' (valósághoz) kapcsolódik, történtek kísérletek annak tisztázására, hogy a matematikaoktatásban hogyan definiálható a realitás és a realisztikus (*Greer*, 1997; *Säljö*, 1991a, 1991b). *Van den Heuvel-Panhuizen* (2001a) rámutat arra, hogy az eredeti holland fogalom, a 'zich realizeren' jelentése 'elképzelni', ezért a realisztikus matematikában a feladatok kontextusa nem minden esetben a realitás, a való világ; a fantáziavilág tárgyai (amelyek elképzelhetők, megjeleníthetők, ezért modellezhetők) ugyanolyan jó kontextust teremtenek a matematika műveléséhez. A 'realisztikus' fogalmának aktuális értelmezése arra utal, ami a tapasztalat számára *tapasztalatilag (experientially)* valós (*Gravemeijer és Terwel*, 2000; *Linchevski* és *Williams*, 1999), aláhúzva, hogy nem az összes hétköznapi probléma lesz szükségképpen tapasztalatilag valós az összes tanuló számára.

Bizonyos jelek arra mutatnak, hogy tizenöt évvel ezelőtt az RME kutatási és fejlesztési munkában (lásd *van den Heuvel-Panhuizen,* 2000) nagyobb hangsúlyt helyeztek a valósághoz való viszonyra, a valós élet és a diákok matematika tanulása közötti erős és releváns kapcsolat még mindig az egyik fő jellemzője az RME-nek. *Treffers* (1993) dolgozta ki a horizontális és vertikális matematizálás (matematikai nyelve való lefordítás) koncepcióját. A matematizálás fogalmát *Freudenthal* alkotta meg (lásd *van den Heuvel-Panhuizen,* 1996, 2000, 2001a, 2001b, 2003). A matematizálás a matematikai tevékenység folyamataira utal; az iskolában nem a matematikát mint zárt rendszert kell tanítani, hanem a valóságból származó dolgok matematikai értelemben vett szervezésének folyamatát. *Treffers* horizontális matematizálási koncepciója arra a folyamatra utal, amelynek során a matematikai eszközöket felhasználjuk a napi problémák szervezésében és megoldásában. A vertikális matematizálás a matematikai rendszer fogalmainak és műveleteinek belső mentális átszervezését jelenti. A diákok matematikai tevékenységében a horizontális és vertikális matematizálási folyamatok összefonódnak, és a matematizálás „lényegében az RME oktatáselméletének valamennyi lényeges aspektusát tartalmazza" (*van den Heuvel-Panhuizen,* 1996, 11. o.).

Az RME egyik döntő kérdése a matematikai modellek (a szó legszélesebb értelmében) bevezetése. A modellek problémaszituációkra való megalkotása és kidolgozása egészen mást jelent, mint a problémás szituációk modelljeinek keresése (lásd. *van den Heuvel-Panhuizen,* 2001a). A különféle modellek alkalmazásának a hatékonysága már bizonyítást nyert a különböző korcsoportokban és különböző területeken. *Gravemeijer* (1994) a számegyenest vizsgálta mint több szempontból is nagyon hatékony matematikai modellt. Ez ugyanis vizualizálás útján lehetővé teszi különféle stratégiák alkalmazását és magyarázatát. Például a 49 kivonása helyettesíthető azzal, ha kivonunk 50-t és hozzáadunk egyet, vagy viszonylag nagy kivonandó esetén (pl. 51 – 49) esetleg könnyebb lehet a kisebb mennyiség felől a nagyobb mennyiség felé továbbszámlálással haladni.

*Klein, Beishuizen* és *Treffers* (1998) ehhez hozzátették, hogy nem csupán az üres számegyenes az, ami hozzájárul fejlesztési programjuk sikeréhez, hanem annak használati módja is, például a különböző megoldási módok pozitív osztálytermi környezetben való ösztönzése és megvitatása. *Keijzer* és *Terwel* (2003) a törtek megértését vizsgálták, és a megértetéshez szintén sikeresen használták a számegyenes modellt (számítógépes játékok segítségével). *Doorman* és *Gravemeijer* (2009) 10. osztályos tanulókkal végeztek kísérletet út-idő-sebesség problémákon, ahol adott időpillanatokat bemutató ábrák sorozatát használták az időbeni elmozdulás és a teljes megtett távolság közötti kapcsolat modellezésére. Az RME elvek magasabb osztályba járó tanulókra való kiterjesztését *Gravemeijer* és *Doorman* (1999) már korábban bemutatták a matematikai analízis *(calculus)* területén. Ebben az esetben a sebességnek az idő/intervallum grafikonokból való meghatározása modellül szolgált tetszőleges függvények integrálásával és differenciálásával kapcsolatban. *Van Garderen* (2007) szerint a tanulási nehézségekkel küzdő gyermekek számára a diagramok mint matematikai modellek biztosítják a szükséges rugalmasságot, hogy egy másik szituációban alkalmazzák azt, amit egy adott szituációban már megtanultak.

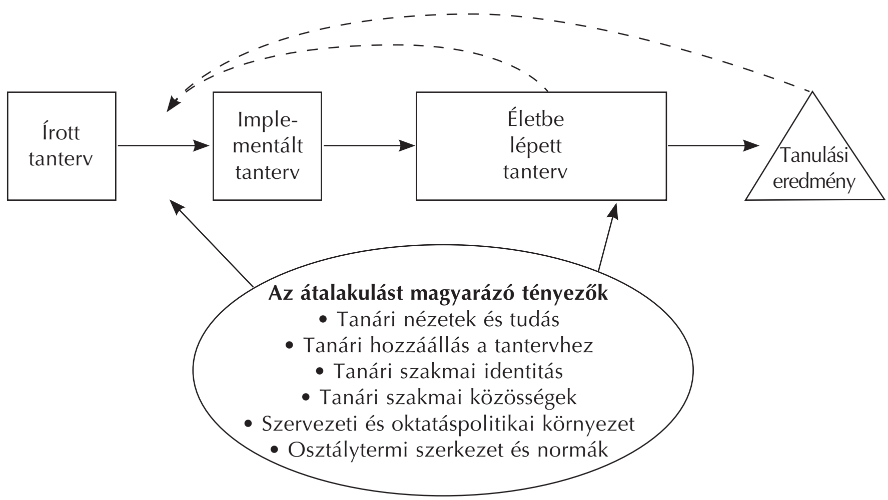
A realisztikus matematikai megközelítés hasznosnak bizonyult a gyengén teljesítő tanulók esetében is. A gyengén teljesítőkre vonatkozó RME elveket és ajánlásokat *Barnes* (2005) tekintette át. A gyengén teljesítő és a sajátos nevelési igényű tanulók profitáltak a leginkább az ún. irányított oktatásból (ami sokkal nagyobb teret biztosít az egyéni részvételnek), mint az ún. strukturált vagy direkt oktatási módszerből (*Kroesbergen* és *van Luit*, 2002). Általánosságban azonban nem sikerült egyértelműen bizonyítani a matematikai oktatási megközelítésmódok (nevezetesen a hagyományos és realisztikus megközelítésmód), valamint a tanulók matematikai eredménye közötti kapcsolatot. Általában nagyobb különbség van a tanulói teljesítményekben egy adott matematikai oktatási megközelítésmód esetén, mint két különböző megközelítésmód között (*Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen,* 2009).

## A matematikai műveltség a tantervekben

A tananyag céljainak és célkitűzéseinek szerepéről és fontosságáról folytatott tudományos párbeszédet az utóbbi időben áthatják a tanítási-tanulási folyamat különböző szintjei, illetve fázisai által definiált különféle tantervek. A kutatás alapú tantervkészítés elemzésekor *Clements* (2008) leszűkíti a fogalmat a rendelkezésre álló tantervre *(available curriculum),* vagyis arra a tantervre, amelyhez létezik oktatási anyag. A (matematika) oktatás szakirodalmában a tanterv fogalmára általánosan elterjedt egy hármas fogalomrendszer: deklarált, implementált és megvalósult tanterv.

A deklarált tanterv az oktatási rendszer különböző szintjein kiadott oktatási dokumentumokra vonatkozik: nemzeti alaptanterv, helyi tantervek stb. Az implementált tanterv az iskolában aktuálisan megvalósuló folyamatokra, míg a megvalósult tanterv a tanterv céljainak elérését mérő teszteken a tanulók által nyújtott teljesítményre vonatkozik.

*Stein*, *Remillard* és *Smith* (2007) ábrája a tananyaggal kapcsolatos változók, köztük a tanulók tanulási folyamatának kapcsolatát mutatja. Bár a fent említett három tantervi fogalom között egyértelmű sorrendiség van, a fogalmak egymásba átalakulásának módja számos tényezővel magyarázható. A *2.1. ábra* is a tantervi fogalmak egymás közötti átmenetét magyarázó tényezők komplexitását mutatja, felsorolva az olyan kölcsönösen és szükségképpen összefonódó jelenségeket, mint a tanárok meggyőződései, a tanárok szakmai identitása és az olyan magasabb szintű változók, mint a szervezeti és politikai szempontok.




*2.1. ábra. Kapcsolat a deklarált, implementált és az életbe lépett (enacted) tantervek és a diákok tanulása között (Stein, Remillard* és *Stein, 2007, 322. o.)*

*Henningsen* és *Stein* (1997) tanulmánya néhány matematikai feladattal összefüggő tényező szerepét vizsgálja a tudás tananyag általi alakításában. Legalább két lépcső van a kiadott tananyag alapján meghatározott feladatok és a tanulók tanulási eredményei (vagyis a megvalósult tanterv) között. A matematikai feladatokat a tanárok határozzák meg az általuk implementált tanterv alapján, a következő lépcsőben pedig a tanulók az osztályteremben végzik el a matematikai feladatokat. Ahogy már említettük: a tanár és a tanuló általi implementációk közötti átmenetet számos tényező befolyásolja, beleértve az általános osztálytermi normákat és a tartalomspecifikus szocio-matematikai normákat (*Yackel* és *Cobb*, 1996), valamint a tanár oktatási elképzeléseit. A tanári nézeteknek és oktatási elképzeléseknek a fontosságát a „feladatok a matematikai műveltség mérésére az osztályteremben" c. részben tárgyaljuk.

A fejezet következő részében a nemzeti (deklarált) tantervekből vett példákra koncentrálunk, mivel számos közvetlen és közvetett tényezőn keresztül a nemzeti tantervek valamilyen módon hatást gyakorolnak mind az implementált, mind a megvalósult tantervekre. Az alábbi példák rámutatnak arra, hogy az elmúlt évtizedekben tanterveink hogyan fogalmazták meg és hangsúlyozták az osztálytermi matematikai tudás és az olyan matematikai tudás egymáshoz közelítésének fontosságát, amely tudás átvihető a különböző típusú problémákra és más iskolai tantárgyakra.

## *Az alaptantervek jellemzői a matematika területén*

A jelenlegi Nemzeti alaptanterv bevezetése előtt az ún. „78-as tanterv" komoly hatást gyakorolt a magyar iskolarendszerre nem csupán előíró jellege miatt (ez a tanterv minden iskolára kötelező érvényű volt és nem voltak helyi tantervek), hanem az általa – többek között a matematika területén is – bevezetett előremutató változások miatt. A nemzeti tanterv matematika része a tanterv többi részének struktúráját követte, azaz célokat és tartalmi követelményeket fogalmazott meg az 1–4. és az 5–8. osztályosok számára. *C. Neményi*, *Radnainé* és *Varga* (1981) azonban a matematika tantervi céljait a fenti intervallumokat átívelően határozták meg: az 1–3. és 4–5. osztályos felosztás azt a meggyőződésüket juttatta kifejezésre, hogy a tanulók matematikai gondolkodásában a szükségképpen folyamatos fejlődési folyamatokat a negyedik osztály végén (mely évfolyam a hivatalos választóvonal a magyar oktatási rendszerben az általános iskola alsó és felső tagozata között) nem érdemes formálisan különváló szakaszokra bontani.

A 78-as tanterv általános céljai között a motiváció olyan értelemben szerepelt, amely a tanulóktól elvárja, hogy legyenek érdeklődők és szeressék a matematikát, egyrészt olyan külső tényezők miatt, mint annak hasznossága és alkalmazhatósága, másrészt olyan belső okokból, mint a matematikában rejlő harmónia, igazság és szépség (262. o.). *Aiken* (1970) szerint a matematikához fűződő felnőttkori viszonyt a gyerekkori tapasztalatok határozzák meg, és a 4–6. osztályban szerzett tapasztalatok ebből a szempontból döntő fontosságúak. A reformok nyomán Magyarországon sokat javult a matematika elfogadottsága; egy tantárgyiattitűd-vizsgálat feltárta, hogy a tanulók a matematikát más tantárgyakhoz képest közepes mértékben kedvelik (*Csapó*, 2000).

A 78-as tantervben megjelent egyéb tantervi célok különös figyelmet szenteltek a kognitív természetű tanulói jellemzőknek. A matematikai tudás különböző összefüggésekben való alkalmazásával kapcsolatban az alábbi célokat találjuk.

A 4. és 5. osztály követelményei között szerepel „annak megítélése (megvédése vagy vitatása), hogy egyértelmű-e egy feladat, nem tartalmaz-e felesleges adatokat, ellentmondó feltételeket, célszerű-e egy megoldási menet” (262. o.). Egy adott évfolyamra, az 5. osztályosokra vonatkozó konkrétabb célok között megtalálható: „legyenek képesek megállapítani, hogy egy feladatban mely adatok feleslegesek, vagy milyenekre volna még szükség” (601. o.), amely cél általában (jóllehet implicite) horizontális matematizálási folyamatokat feltételez. A 3. osztály végére a tanuló „legyen jártas szöveges feladatok adatainak önálló feljegyzésében, rendezésében. Tudjon megfelelő matematikai modellt találni (rajz, kirakás, műveletek, nyitott mondat); szöveges feladatot megoldani a talált modellel vagy anélkül, próbálgatással” (283. o.). Ez utóbbi módszer nyíltabban utal a szöveges feladatok megoldásában a horizontális matematizálás szükségességére.

A Nemzeti alaptanterv (NAT, első változat: 1995, legújabb változat: 2007) több teret biztosít az iskolai autonómiának, és lazábban, általánosabban fogalmazza meg az országos tantervi célokat. A helyi tantervben kell kidolgozni az országos tantervi célokat a konkrét iskolai környezetben. A nemzetközi rendszerszintű felmérések aktuális tendenciáinak megfelelően a matematikakompetencia fogalma tartalmazza azt a fontos elemet, mely szerint „az egyén rendelkezik azzal a képességgel, hogy alkalmazni tudja az alapvető matematikai elveket és folyamatokat az ismeretszerzésben és a problémák megoldásában, a mindennapokban, otthon és a munkahelyen" (9. o.). A Nemzeti alaptanterv életkorhoz kapcsolódó céljainak többsége egynél több – egyenként két év hosszúságú – életkori intervallumhoz kapcsolódik.

A NAT-célok struktúrája a kétéves intervallumok rendszerét követi, azaz a célok első mérföldköve a második év végén, a második mérföldkő a negyedik év végén van, stb. A NAT tantervi céljainak második szempontját a matematikai műveltség alterületei jelentik. Az egyik részterület neve „Ismeretek alkalmazása". Ez a terület olyan tantervi célokat tartalmaz, amelyek egyértelműen a mindennapi életből vett szituációkra és más iskolai tantárgyakra utalnak. A matematikai ismereteknek a mindennapi életben való alkalmazása mint cél már a harmadik életkori csoporttól (azaz az 5. osztálytól) egészen a 12. osztályig minden korosztály számára követelmény. Hiányossága a tantervnek, hogy az első évfolyamokra nem fogalmaz meg egyértelműen ilyen célokat. Az osztályteremben megszerzett tudás valós élethelyzetekben való alkalmazását mind oktatási, mind értékelési módszerekkel érdemes erősíteni, különösen az iskola kezdő szakaszában.

*Hiebert* és mtsai (1996, 14. o.) arra figyelmeztetnek, hogy „az ismeretek megszerzése és azok alkalmazása közötti feszültség nem csupán a matematikára jellemző". „Az iskolai tanulás 'mindennapi élettől' való elválasztásának problémája felkeltette a megismerés társadalmi-kulturális természetével foglalkozó kutatók figyelmét" (*Säljö*, 1991a, 183. o.). *Hiebert* és mtsai szerint azonban a tudás alkalmazási dimenziójának előtérbe helyezése kevésbé körvonalazható tanterveket eredményezhet, és a tanárok aggódhatnak a fontos információk elvesztése, azaz a tananyag bizonyos részeinek kiesése miatt, ha az időt időigényes alkalmazási megoldásokra kell fordítani. Itt most nem tudunk részletesen foglalkozni a matematikatanár-képzés jellemzőivel és problémáival, jóllehet *Szendrei* (2007) ezek közül néhányra rámutatott, amikor a 70-es évektől áttekintette a magyar matematikaoktatás és matematikatanár-képzés tendenciáit és erőfeszítéseit. Egyik legfontosabb javaslata, hogy a matematikatanárok képzésében több időt kell fordítani a matematika oktatástanára (didaktikájára) – jelenleg sokkal nagyobb hangsúlyt kap magának a matematikának az oktatása.

## *A matematikai ismeretek alkalmazása és a többi iskolai tantárgy matematikával szembeni elvárásai*

Történelmileg a matematika vezető szerepet játszott a tudományok fejlődésében. *Maddy* (2008) szerint a 17. századig a nagy gondolkodók nem tudták elválasztani egymástól a matematikát és a természettudományokat. A 19. században kezdtek a matematikusok először olyan fogalmakat kidolgozni, amelyeknek nem volt közvetlen fizikai jelentése. A matematika és a természettudományok történeti fejlődése azonban még mindig hatással van az iskolai tananyagra és a tantermi gyakorlatra. Érdekes, hogy a Nemzeti alaptanterv az „Ember a természetben" műveltségi terület tanulási céljainak részletes felsorolása során nem említi explicite a „matematika" vagy a „matematikai" fogalmakat. Ugyanakkor a „Földünk-környezetünk" műveltségi területen belül számos olyan pont van, amely hangsúlyozza a matematikai képességek (kompetenciák) szerepét a földrajzi ismeretek megszerzésében. Három fő csoport van, ahol a matematika fontossága és szerepe megérthető: (1) számok használatának képessége méréseknél és adatkezelésnél, (2) térbeli intelligencia a térben való tájékozódáshoz, és (3) logikus érvelési képesség különösen a komplex térbeli és környezeti rendszerek megértésében.

Összességében elmondható, hogy a magyar NAT-ban meglepően kevés konkrét kapcsolat van a matematikai és a természettudományos követelmények között. Természetesen a tanárok összekapcsolják a természettudományos témákat a nélkülözhetetlen matematikai ismeretekkel, de az aktuális iskolai gyakorlatra még ma is érvényes *Pollaknak* (1969, 401.o.) az a régi kritikai megjegyzése, hogy „a tanulók számára nem adott a lehetőség, hogy részt vegyenek egy olyan absztrakcióban, amely során a fizikai valóságból eljutnak a matematikai modellig". A közeljövőben változásokra számítunk, köszönhetően részben a kutatás alapú tanulásról készített Rocard-jelentésnek (*High Level Group on Science Education*, 2007) és a nemrégiben elindult olyan projekteknek, mint például a PRIMAS *(Promoting Inquiry in Mathematics in Science Education across Europe).*

### *A matematikai műveltség definíciója a PISA felmérésekben*

A PISA (*Programme for International Student Assessment*, az OECD nemzetközi tanulói teljesítménymérés programja) felmérések célja a tanulók tudásának és képességeinek meghatározása és mérése olyan fontos területeken, mint a matematika, az olvasás és a természettudományos műveltség. A matematikai műveltség állt a 2003-as PISA felmérés középpontjában (OECD, 2004). Ez a dokumentum hangsúlyozza, hogy a „műveltségi megközelítés” kifejezi azt a szándékot, hogy a matematikai ismereteket és képességeket ne az iskolai tananyag beható ismerete alapján határozzuk meg és értékeljük, hanem a társadalomban való teljes körű részvételre való készség alapján.

Az „emberi tőke” általánosabb gazdasági definícióját alapul véve, a PISA tanulmányok a következőképpen fogalmazzák meg a matematikai műveltséget: „A matematikai műveltség az egyén azon képessége, amellyel azonosítja és megérti a matematika szerepét a világban, jól megalapozott döntéseket hoz, és az egyén életszükségleteinek megfelelően alkalmazza a matematikát konstruktív, érdekelt és megfontolt állampolgárként.” (OECD, 2003, 24. o.)

Ennek a definíciónak egyes elemei további kifejtésre kerülnek a fent említett dokumentumban, pl. a „világ” fogalma jelenti a természeti, társadalmi és kulturális objektumokat, és a fogalom még további tisztázására kerül sor *Freudenthal* munkásságára hivatkozva. A PISA matematikai feladatainak rendszere a matematikai műveltség fenti definícióján alapul. A tanulóknak különböző tartalmi, tudásszint- és kontextusdimenziókhoz tartozó feladatokat kell megoldaniuk. Következésképpen, a „matematika alkalmazása és a vele való foglalkozás” kritérium hangsúlyozza a különböző tartalmi területeken, különböző kompetenciaszinteken és különböző összefüggésben alkalmazható matematikai tudás elsajátításának fontosságát. A „reflektivitás” az egyes területek közötti tudástranszfert elősegítő tudatos és meta-reprezentációra épülő folyamatokra utal (*Adey* és mtsai, 2007).

A PISA felmérések jelentőségét és annak lehetőségét, hogy az eredmények felhasználásra kerüljenek a bizonyítékokra alapozott *(evidence-based*) oktatáspolitikai döntésekben, meggyőzően mutatja számos másodelemzés (lásd pl. *Baumert* és mtsai, 2009).

## Feladatok a matematikai műveltség mérésére

Ebben a részben a matematikai műveltség osztálytermi feladatainak alkalmazását és jellemzőit vizsgáljuk. Oktatási szempontból azokat a formatív értékelést megvalósító feladatokat tárgyaljuk, amelyeknek az a szerepe a tanítási-tanulási folyamatban, hogy fejlesszék a tanulók matematikai megértését. A matematikai műveltség feladataira összpontosítunk, abban az értelemben, ahogyan a matematikai műveltség meghatározása a PISA felmérésekben adott. A matematikai ismeretek alkalmazással összefüggő céljait illetően a PISA felmérésekben szereplő kontextus dimenzió értelmezhető úgy, mint a matematikai tudás különböző szituációkban való alkalmazása (lásd OECD, 2006).

A PISA műveltségi megközelítése (OECD, 1999) elvárja a tanulóktól, hogy „a matematikai modellezés teljes ciklusában részt vegyenek” (*Palm*, 2009, 3. o.) olyan feladatok megoldásával, amelyek iskolán kívüli problémahelyzetekkel is foglalkoznak. Bár a PISA matematikai műveletség koncepcióját a 15 éves tanulók eredményeinek mérésére fejlesztették ki, szeretnénk hangsúlyozni, hogy a fiatal gyerekek matematikai műveltsége is fejleszthető és mérhető különböző kontextusokban, különböző alkalmazási területeken.

### *A tantermi szöveges matematikai feladatok jellemzői*

Ebben a részben elemzésünket a matematikai tudás alkalmazása szempontjából releváns matematikai feladatokra korlátozzuk. Mivel a matematikai tudás alkalmazása általában szöveges kidolgozást igényel (legalábbis a probléma felvetésének szakaszában), elemzésünk középpontjában a szöveges feladatok állnak. „A szöveges feladatok olyan problémahelyzetek szöveges megfogalmazását jelentik, amelyekben egy vagy több kérdés vetődik fel, és amelyekre a választ a matematikai műveleteknek a problémafelvetésben szereplő számszerű adatokra való alkalmazásával lehet megadni.” (*Verschaffel*, *Greer* és *De Corte*, 2000, ix. o.)

Az elmúlt néhány évszázadban a szöveges problémák két, egymással kölcsönhatásban lévő szerepet töltöttek be. A matematikai szöveges feladatok már az ősi folyamvölgyi kultúrák megjelenésétől kezdve lehetőséget adtak a számolási készségek gyakorlására, egyidejűleg azonban eszközt biztosítottak a mindennapi élet bizonyos, az adott történelmi helyzetben döntő fontosságú problémáinak megoldására. Az ősi egyiptomi munkások munkájához vagy a sikeres velencei kereskedővé váláshoz szükséges számtani ismeretek egyaránt magas szintű számolási készségeket, valamint a mindennapi életben felmerülő problémák és a matematikai prototípus példák közötti szoros összefüggés megteremtésének képességét kívánták meg (lásd *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte*, 2000). A szöveges feladatok e kettős funkciója máig él, és a köztük lévő ütközés, valamint szoros összekapcsolódás kérdéseket vet fel a szöveges feladatok hatékony alkalmazásáról tantermi környezetben.

*Pollak* (1969, 393. o.) az alábbiak szerint indokolta a szöveges feladatok fontosságát a matematika alkalmazásának fejlesztésében: „Hogyan lehet a diákot bevonni a matematika alkalmazásába? Leginkább azzal, hogy az oktatásban szöveges feladatokat használunk".

A tantermi matematikai szöveges feladatok szöveges, szemantikai és matematikai jellemzőik alapján csoportosíthatók és elemezhetők. A tanult ember könnyen különbséget tud tenni a különféle szöveges feladatok között. Ahogy *Säljö* (1991b) rámutatott, még a huszadik századi olvasó is könnyen felismeri a szöveges feladat matematikai műfaját, és képes lehet az alábbi, 1478-ból származó szöveghez hasonlók értelmezésére: „Ha 17 ember 9 nap alatt 4 házat épít fel, akkor 20 ember hány nap alatt épít fel 5 házat?"

Amennyiben a feladatmegoldó tudja, hogy egyenes arányosság áll fenn a dolgozó emberek száma és a felépített házak száma között, „ezen ismeret birtokában rájöhet arra, hogy az a tevékenység, melyre a szöveg utal – házak építése – esetleges, legalábbis nem központi kérdése az elemi számtani feladatnak" (*Säljö*, 1991b, 262. o.). E feladat tartalma korlátozás nélkül variálható, és a megoldáshoz nem szükséges semmilyen házépítési technológia vagy csapatmunka-módszer ismerete. Sőt, kifejezetten hátrányos lenne elkezdeni a feladatban szereplő változók realitásának mélyreható szemantikai elemzését. „A látszólag valós (pszeudoreális) szövegkörnyezetek … arra ösztönzik a tanulókat, hogy az iskolai matematikát különös és misztikus nyelvezetnek tekintsék" (*Boaler*, 1994, 554. o.). A szöveges feladatok mikrovilága (a fogalmat *Lave*-től [1992] kölcsönöztük) ugyanahhoz a szöveges műfajhoz tartozik, mint amit *Flaubert* két évszázaddal ezelőtt kifigurázott, amikor megírta hírhedt levelét a „Hány éves a kapitány?" típusú problémákról.

*Boaler* (1994) feminista szemszögből bírálta az ún. pszeudo-realisztikus matematikai szöveges feladatokat. Bár sok feladat egyformán furcsa a fiúk és lányok számára, *Boaler* kutatásában a hagyományos tanulási környezetben a lányok jobban szenvedtek a látszólag valóságos feladatoktól, mint a fiúk. Tanulmányaiban komolyan kifogásolja és leleplezi ezt a hagyományos megközelítést, amely figyelmen kívül hagyja a tartalom szerepét. Az iskolai matematikai szöveges feladatok fő problémája, hogy felfüggesztik a valóságot, és figyelmen kívül hagyják a józan észt, amikor átlépnek a szöveges feladatok műfajába. *Boaler* (1994) szerint ez a nehézség leküzdhető akkor, ha az oktatási módszerekben áttérünk a folyamat alapú tanulási környezetre. A folyamat alapú tanulási környezet, ahol minden diák nyitott problémák megoldásán dolgozik, és bátorítást kap a matematika tanulmányozására és felfedezésére, csökkenti a nemek közötti különbségeket a matematikai teljesítményekben. (lásd még *Boaler*, 2009).

Az osztálytermi szöveges matematikai feladatoknak lehet egy másik olyan oldala, amely akadályozza a tanulók fejlődését. A törtek tanulása során *Mack* (1990) azt tapasztalta, hogy a feladatok sorrendje nem felel meg annak, ahogyan a diákok előtanulmányai segítenék a törtek megértését. Konkrétan, a 6. osztályos tanulónak bőséges előzetes tapasztalata van a törtekkel kapcsolatban, és gyakran használja a részekre osztást (vagyis mennyiségek részekre való felosztását), ezért viszonylag könnyen megérti az olyan törteket, amikor a számláló nagyobb, mint a nevező. Az ilyen törteket tartalmazó feladatok azonban a tankönyvek törtekkel foglalkozó fejezeteinek a legvégén szerepelnek.

Hasonló problémát fedezett fel *Lampert* (1986) a szorzással kapcsolatban. Rámutatott, hogy a diákok gondolkodásában a szorzás bonyolultabb, mint az ismételt összeadás. Ha az oktatás során az egyén szorzásra vonatkozó mentális modelljét összeadási műveletekre korlátozzuk, a tanuló később nem lesz képes megérteni a folyamatos mennyiségekkel végzett szorzást. *Lampert* és *Mack* kutatási eredményei szépen alátámasztják a matematikaoktatás legújabb, általánosabb elveit, mint pl. az RME matematizálási koncepcióját. Ugyanezt támasztja alá *Schoenfeld* (1988) eretnek nézete a jól megtanított leckék veszélyéről: a matematika felépítésében a gondosan végrehajtott lépések sorrendje azt az üzenetet közvetíti a tanulóknak, hogy a (matematikai) pontosság az, ami számít, és nem magának a matematikának a gyakorlása. Az utcai gyermekárusok körében végzett kutatás dokumentálta, hogy a diákok tapasztalatai milyen váratlan eredményeket produkálhatnak a szöveges matematikai feladatok megoldásában (*Carraher*, *Carraher* és *Schliemann*, 1985; *Saxe*, 1988). Bár matematikai szempontból a nagyobb természetes számokat nehezebb összeadni és kivonni, az inflálódó brazil valutával tapasztalatot szerzett gyerekek jobbak voltak a valódi árakkal összemérhető árak összeadásában, annak ellenére, hogy ezek a számok viszonylag nagyobbak voltak.

Az osztálytermi szöveges feladatokat számos vizsgálatban olyan jellemzők alapján kategorizálták, amelyek egyszerre matematikai és kognitív természetűek. Ami az additív struktúrákat illeti, az alábbi egyszerű szöveges feladatokat azonosították: feladatok összekapcsolása, összehasonlítása, változtatása és kiegyenlítése (lásd *Radatz*, 1983; *Riley* és *Greeno*, 1998; *Jitendra*, *Griffin*, *Deatline-Buchman* és *Sczesniak*, 2007; *Morales*, *Shute* és *Pellegrino*, 1985).

A feladat tartalmától függetlenül a tanulók törekszenek a szöveges feladatok kategorizálására és a szöveges feladatok megoldhatóságába vetett meggyőződésük által vezérelve különböző stratégiákat dolgoznak ki a különböző feladatok megoldására. A feladatok kategorizálására irányuló tendencia önmagában nem jelent problémát, mivel a felszínesen eltérőnek látszó feladatok közös struktúrájának felismerése fontos jellemzője az adott területen fennálló valódi szakértelemnek (lásd pl. *Sternberg* és *Frensch*, 1992). És bár egy feladat megoldásához általában elegendő a számolási művelet és az ahhoz a művelethez illesztendő adatok megtalálása, ez zsákutcába viheti a tanulók matematikai fejlődését. *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte* (2000) elemzi a szöveges feladatmegoldásnak ezt az úgynevezett felületes sémáját, és összehasonlítja a valódi matematikai modellezési sémával. A döntő kérdés az, hogy a tanuló a feladat mélyreható megértése alapján létrehoz-e egy megfelelő modellt a szituációról, vagy kihagyja a szituációs modell létrehozásának lépcsőjét, és közvetlenül a megfelelőnek ítélt matematikai modellre ugrik – a feladat felületes jellemzői alapján. A szöveges feladatmegoldásokban rejlő zsákutcákat *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte* (2000) munkája dokumentálja. Egy magyarországi kutatás további bizonyítékokkal szolgál a felületes szövegesfeladat-megoldási stratégiákról és azok erősségéről (*Csíkos*, 2003).

A szöveges feladatok osztálytermi alkalmazásának egy fontos aspektusa a tanárok meggyőződése és magatartása a realisztikus szöveges feladatokkal kapcsolatban. „Úgy tűnik, hogy a tanárok meggyőződése szerint a realisztikus összefüggésen alapuló megfontolásokat *nem* kellene ösztönözni, sőt inkább vissza kellene szorítani az általános iskolai matematikában" (*Gravemeijer*, 1997, 391. o. – dőlt betű az eredeti szövegben). *Verschaffel*, *De Corte* és *Borghart* (1997) empirikusan igazolták a tanárjelöltek azon beállítódását, hogy nem realisztikus válaszokat adnak egyszerű aritmetikai szöveges feladatokra, valamint hogy hajlamosak jobb osztályzatot adni a tanulóknak a szöveges feladatok nem realisztikus interpretálásáért és megoldásáért.

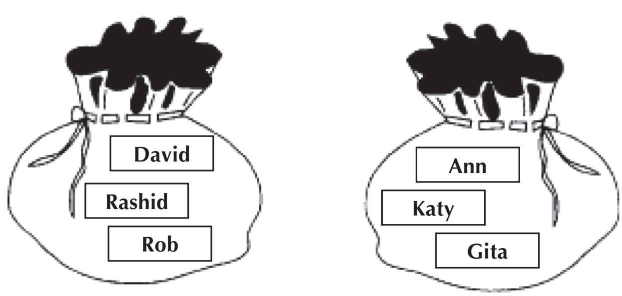
### *Szocio-matematikai normák, kontextuális és tartalmi hatások*

A „szocio-matematikai normák" fogalmát *Yackel* és *Cobb* (1996) vezették be. Ezek a normák, amelyek (a tágabb értelemben vett szociális normákkal ellentétben) a matematika tantervi területeire korlátozódnak, az egyéni és csoportos matematikai tevékenységekből (osztálytermi gyakorlatok) erednek. A matematikai közösséget képviselő tanítóknak (*Yackel* és *Cobb* második osztályosok körében végezték kísérleteiket) döntő szerepük van a matematikai normák kialakításában, azok megtanításában és megtanulásában: milyen egy megfelelő matematikai feladat, mi a matematikai feladatra adandó helyes válasz, és hogy melyek a magyarázat és érvelés elfogadható formái, stb. Ezek a normák osztályonként változhatnak, de „szocio-matematikai normák az oktatási hagyományoktól függetlenül minden osztályban kialakulnak" (462. o.).

A szocio-matematikai normák egyik fontos aspektusa, hogy az adott osztályban kialakult normák szerint az elfogadható matematikai magyarázatok matematikai vagy státus alapúak. Sok gyerek hajlamos azt feltételezni, hogy a válasza helytelen, ha a tanár megkérdőjelezi azt. Ez a norma könnyen merev és hamis meggyőződésekhez vezethet a matematikai feladatmegoldás és érvelés természetével kapcsolatban. Bár a gyerekek matematikai meggyőződéseinek elemzése kívül esik e fejezet témakörén, jórészt ezek a matematikai meggyőződések magyarázzák a matematikai tudásuk különböző kontextusokban való alkalmazásának nehézségeit (pl. az utcai, ill. az iskolai matematikában, lásd *Carraher* és mtsai, 1985). Számos tanulmányban megjelenik az a szilárd meggyőződés, hogy egy matematikafeladatnak mindig (csak) egy helyes megoldása van, és (csak) egy helyes út vezet el a megoldáshoz (lásd pl. *Reusser* és *Stebler*, 1997; *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte*, 2000; *Wyndhamn* és *Säljö*, 1997).

A szocio-matematikai normák kialakulása és speciálisan a valóságnak a szöveges feladatmegoldásban játszott szerepe jobban megérthető a szociológia és a nyelvészet tárgykörébe tartozó néhány elmélet fényében. *Cooper* (1994) sikeresen használta fel *Bernstein* iskolai tudáskódjait ahhoz, hogy megkülönböztesse a józan észen alapuló tudást az iskolai tudástól (más néven a mindennapi tudást az ezoterikus tudástól). *Bernstein* érvelése szerint a gyerekeket már iskolai pályafutásuk nagyon korai szakaszában elbátortalanítják attól, hogy a józan ész adta tudásukat összekapcsolják az iskolai tudással. Még ma is találkozhatunk azzal, hogy az iskolai siker bizonyos mértékig attól függ, hogy a tanuló mennyire hajlandó kizárni a józan észen alapuló tudását mint információforrást a matematikai feladat megoldásakor. *Cooper* és *Dunne* (1998) felhasználták *Bernstein* és *Bourdieu* meglátásait is az iskolai (és matematikai) teljesítményben lehetséges társadalmi osztálykülönbségekről. Ezek a különbségek az iskolai szituációkban megkövetelt kulturális erőforrásokhoz való hozzáférés viszonylagos hiányának tulajdoníthatók. A *Bourdieu* által bevezetett hatékony fogalom, a „gyakorlati érzék” *(feel for the game)* felhasználható társadalmi osztálykülönbségek magyarázatára néhány standardizált matematikai tételnél. Az egyik meglepő példa az ún. „tenisz”-feladat *(2.2. ábra)*.

David és Gita csoportja vegyespáros teniszversenyt rendez. Egy fiút egy lánnyal kell párosítani. Az egyik táskába beteszik a három fiúnevet, a másikba a három lánynevet.




*Add meg a fiúk és lányok párosításának összes lehetséges változatát!*
***Írd le a párok neveit**. Egy párt előre megadunk.*
***Rob és Katy***

*2.2. ábra. A „tenisz”-feladat (Cooper* és *Dunne, 1998, 132. o.)*

A tanulók teljesítményének részletes elemzése és az interjúátiratok megmutatják, hogy a „gyakorlati érzék” jelenség hogyan magyarázza a társadalmi osztálykülönbségeket. Az ezoterikus matematikai érvelésnél világos, hogy a gyerekek neve és nemzetisége nem releváns adat a feladat szempontjából. Ezek a gyerekek azonban három „realisztikus” párt alkottak abban az értelemben, hogy a három pár különböző volt; mindegyik nevet csak egyszer használták. *Cooper* és *Dunne* szerint az ilyen típusú feladat felveti az egyenlőség problémáját, vagyis az oktatásban az egyenlő lehetőségek kérdését. Szintén *Boaler* (2009) elemezte és kritizálta azt, hogy a matematikai szöveges feladatok általánosságban hogyan okoznak egyenlőtlenségeket (nem, társadalmi osztály stb. szempontjából).

Más empirikus eredmények rámutatnak, hogy 3. osztályban a történetet elbeszélő szöveges feladatok (vagyis ahol a számok és viszonyaik egy elbeszélő történetbe vannak beágyazva) kihívást jelentenek a tanulók számára (*Jitendra*, *Griffin*, *Deatline-Buchman* és *Sczesniak*, 2007). Mindazonáltal 3. osztályban a szövegesfeladat-megoldás jól jellemzi az általános matematikai jártasságot (*Jitendra*, *Sczesniak* és *Deatline-Buchman*, 2005).

A kultúrának a matematikai teljesítményben játszott szerepe a nyelvi kompetenciát is magába foglalja. A szöveges matematikai feladatok megértéséhez az egyénnek képesnek kell lennie szemantikailag elemezni a feladat nyelvi elemeit, valamint megnevezni a fontos és felesleges részeket. *Elbers* és *de Haan* (2005) multikulturális osztályokat tanulmányozott, hiszen ezekben különösen fontosak a szöveges matematikafeladatok nyelvi elemei. Azt találták, hogy a szövegértés nyelvi problémáinak megoldásához nem elegendő a szó köznapi jelentésére való utalás, a beszélgetések (és a tanulók segítségkérő magatartása) inkább a fogalmak speciális, matematikai kontextusú jelentésére irányultak. A szöveges feladatok műfajának és kontextusának megértése elsőbbséget élvez a szövegek tisztán szemantikai megértésével szemben, ezt *Morales*, *Shute* és *Pellegrino* (1985) is alátámasztották, akiknek vizsgálata szerint nem bizonyítható a nyelvi hatás sem a megoldás pontosságára, sem a szöveges matematikafeladatok kategorizálására – kutatásukban mexikói-amerikaiak szerepeltek. Mindazonáltal jól dokumentált adatok bizonyítják, hogy a szöveges feladat nyelvi jellemzői bizonyos mértékig befolyásolják a megoldási folyamatot (pl. az ‘ezekből’ fogalom befolyásolhatja a megfelelő mentális reprezentáció kialakulását, lásd *Kintsch,* 1985).

Két hatékony stratégia létezik a tanulók mentális reprezentációja és az elérendő tanulási célok összekapcsolásának elősegítésére: a szöveges feladat átfogalmazása, ill. személyre szabása. *Davis-Dorsey*, *Ross* és *Morrison* (1991) vizsgálata feltárta, hogy az 5. osztályos tanulók többet profitáltak a feladat személyre szabásából (vagyis a tanulóra vonatkozó személyes információk beépítéséből), míg a második osztályosok számára hasznos volt mind a személyre szabás, mind a tartalom átfogalmazása (vagyis a szöveg explicitebbé tétele, ami segítette a tartalom matematikai fogalmakra való lefordítását). Ebben a kísérletben a matematikailag azonosnak tekinthető szöveges feladatok szöveges és tartalmi jellemzőik tekintetében voltak eltérőek.

A tantermi környezet javításának egy másik – még radikálisabb – módja a reciprok tanítási technika alkalmazása a matematikában. *Magdalene Lampert* (1990) az olvasástanításból vette át a reciprok tanításnak nevezett módszert (lásd még van *Garderen*, 2004). E módszer lényege, hogy az osztályteremben szándékosan felcserélik a tanári és tanulói szerepeket és feladatokat. Megjegyzi, hogy ez a változtatás egyúttal megkívánja a matematikaórákat meghatározó feladatok megváltoztatását is. A matematikai tudás alkalmazása különféle kontextusainak meghatározásában *Light* és *Butterworth* (1992) munkáit követjük, akik viszonylag tág megfogalmazással éltek; egy feladat kontextusa a feladathoz kapcsolódó információ különböző rétegeiből tevődik össze: fizikai, szociális és kulturális jellemzőkből. Az azonos matematikai struktúrával és azonos tartalommal bíró matematikai feladatok a kontextus változásától függően különböző módon oldhatók meg. Ahogy azonban *Verschaffel*, *Greer* és *De Corte* (2000) rávilágít, a kontextus megváltoztatása a szöveges feladatok egy speciális osztálya esetében csupán kismértékű változást eredményezhet a tanulók teljesítményében. Ezek a kontextus-változások figyelmeztető üzenetekben jelentek meg a papír-ceruza teszteknél, vagy a feladatokat rejtvény jellegű feladatokat tartalmazó tesztekbe építették be. Ezek az apró változtatások azt sugallják, hogy a papír-ceruzás módszernél maradáshoz képest radikálisabb változtatásoknak nagyobb hatása lehet a tanulók megoldási mintáira.

A feladat tartalma meghatározható úgy, hogy a kontextus definícióját vesszük kiindulópontnak. Továbbá felhasználható *Kintsch* és *Greeno* (1985) alapján a ‘főnévi fogalom’ (noun term) kifejezés is. A matematikai oktatási közösségben van egy széles körben elfogadott (vagy legalábbis használt) feltevés: a szöveges feladatoknak be kell tölteniük azt a szerepet, hogy a számtani készségek gyakorlásának terepévé váljanak. E hagyománynak megfelelően a feladat tartalmának módosítása nem feltétlenül befolyásolja a tanuló teljesítményét; sőt a tanulóktól elvárt, hogy transzfer képességekre tegyenek szert, amelyekkel egyformán jól meg tudják oldani a matematika feladatokat, függetlenül a feladat aktuális tartalmi elemeitől. Nem számíthat az, hogy egy feladat főnévi fogalma a futball, vagy a divat mikrovilágából származik, vagy hogy néhány felületes változtatást hajtunk végre a megadott feltételek és/vagy a kérdés megfogalmazásában, illetve felvetésében.

## A matematikai műveltséget mérő feladatok egy lehetséges nevezéktana

Ebben a részben javaslatot teszünk a matematikai feladatok kategorizálására. Számos aspektus van, amely kiindulópontja lehet a különböző kategorizálásoknak. A nemzetközi rendszerszintű felmérésekben (lásd pl. OECD, 1999) általában van egy többdimenziós modell, amelyben a feladatokat matematikai tartalmuk, az elvárt gondolkodási folyamat és a feladat formátuma alapján osztályozzák. A PISA vizsgálatokban (lásd OECD, 2003) a feladatok kontextusa új dimenzióként jelent meg. A kontextusdimenzió és e skálának a négy értéke az oktatáspolitika azon szándékának kifejezéseként értendő, amely nagy figyelmet akar szentelni a matematika alkalmazási oldalának, és a matematikai műveltség értékelésében tartalmi területek széles körét akarja lefedni.

Ha két vagy három dimenziót (pl. matematikai tartalom, kontextus és kompetencia klaszter a 2003-as PISA felmérésben) és ezeknek a konkrét értékeit akarjuk felhasználni, modellként egy téglalapot vagy téglatestet használhatunk, amelyekben cellák reprezentálják a különböző feladattípusokat. A következőkben bemutatjuk a matematikai tudás ‘alkalmazási’ dimenziójának általunk javasolt kategóriarendszerét. Ennek a kategorizálásnak az előzményei részben a PISA tanulmány kontextuális dimenziójában találhatók, de főként az RME mozgalom horizontális matematizálási elgondolásaira épül.

### *Kihívások és nehézségek az alkalmazási feladatok kategóriarendszerének kialakításában*

E kategorizálás logikája és alapja összhangban van Eriksonnak (2008) az aritmetikai gondolkodás fejlődési szakaszairól vallott elképzelésével. A különböző fejlődési szakaszokhoz megfelelő viselkedési minták és mentális struktúrák társíthatók. A mentális struktúrák lehetséges hierarchiájából kiindulva ezek párosíthatók a megfelelő értékelési kontextusokban megfigyelhető viselkedési mintákkal. Ebben az értelemben a különböző viselkedési mintát igénylő, egyértelműen a különböző feladatkategóriákhoz tartozó feladatok lehetővé teszik a tesztmegoldók megfelelő mentális struktúrájának a feltárását. A matematikatudás alkalmazási dimenziójával kapcsolatban azonban problémák merülnek fel a mentális folyamatok és a megfigyelhető viselkedés összeillesztésekor. Az egyik ékes példát *Cooper* (1994) szolgáltatta. Az ún. *„lift"-feladat (2.3. ábra)* gyakran idézett példa annak illusztrálására, hogy egy nyitott kérdés különböző lehetséges megoldásai hogyan elemezhetők attól függően, hogy a feladatot realisztikus vagy rutin feladatként értelmezzük.

*Egy irodaépület liftjében ez a felirat olvasható:*

| |
|---|
| Ez a lift max.<br>**14 embert szállíthat** |

*A reggeli csúcsforgalomban 269 ember akar felmenni a lifttel.*
*Hányszor kell a liftnek felmennie?*

*2.3. ábra. A „lift"-feladat*

*Cooper* (1994) elemzése világosan mutatja, hogy az elvárt helyes válasz (azaz 269:14, fölfelé kerekítve a legközelebbi egész számhoz) nagyon eltérő értelmezési és megoldási stratégiák eredményeként jöhet létre. Az egyik lehetséges értelmezés, hogy a feladat egy valós problémát jelent, amit meg kell oldani, de figyelembe véve a feladatmegoldási körülményeket a tanulók nem hozhatnak létre új változókat és nem kérdőjelezhetik meg a feladatban implicite benne foglalt alapelveket. A másik lehetséges értelmezés, hogy a feladat egy rutin iskolai matematikaproblémát fogalmaz meg, de van benne egy csapda. Ebben az esetben a tanuló nem oszthatja el a 269-t 14-gyel, mert csapdába esik. Azonban, ahogy *Cooper* is sugallja, az első fajta megoldás több olyan feltételezést kíván, ami szinte soha nem igaz, például, hogy a lift mindig teljesen tele van, kivéve az utolsó alkalmat. Aki azonban feltételezi, hogy a 14 személy szállítására alkalmas lift átlagosan 10 embert szállít, rossz választ fog adni, hacsak rá nem jön arra, hogy a feladatban nem lehet új változókat létrehozni, hanem fel kell ismerni a szándékot, és azokat a szabályokat alkalmazni, amelyeket az ilyen feladatok megkívánnak.

A szakirodalom tartalmaz néhány ajánlást a realisztikus (és nem realisztikus) szöveges matematikafeladatok osztályozására. Az egyik releváns szempont, hogy a feladat osztályozásának van-e mentális reprezentációs és oktatási fókusza, ill. hogy van-e rendszerszintű értékelési célja. Az első szempont a *Galbraith-* és *Stillman-* (2001) féle taxonómia jellemzője. *Verschaffel* (2006) szerint ez az osztályozás a tanuló gondolkodási folyamatára összpontosít, amelynek fel kell tárnia a szöveges feladat és a valós világ közötti kapcsolatot. Ebben a rendszertanban négyféle szövegesfeladat-kategória létezik:

(1) értelmetlen feladatok, amelyekben súlyosan megsértik a reális korlátokat;
(2) kontextusból kiemelt feladatok, ahol a kontextus nem játszik valódi szerepet a megoldásban, és amelyek lecsupaszíthatók a tisztán matematika kérdésfeltevésére;
(3) standard alkalmazási feladatok, ahol a szükséges matematika kontextusba van ágyazva, és a szituáció valóságos, de ahol az eljárás is (még) meglehetősen standard;
(4) valódi modellezési feladatok, ahol a probléma megfogalmazásában a matematika mint olyan nem jelenik meg, és ahol a probléma matematikai fogalmakkal való lehatárolását és megfogalmazását (legalább részben) a modellezőnek kell elvégeznie.

Ez a taxonómia a tanulók gondolkodási (és modellezési) folyamataira összpontosít, vagyis arra, hogyan teremtenek kapcsolatot mentális reprezentációjuk és a valódi világ tárgyai között.

Egy másik kategorizálás, amely ugyancsak a fejezet további részében ismertetett kategóriák fontos előfutárának tekinthető, *Palm* (2008, 2009) nevéhez fűződik. *Palm* a szöveges feladatoknak azokra a jellemzőire összpontosít, amelyek az iskolán kívüli szituációkat fejezik ki. Megkísérli leírni, hogy milyen jellemzőkkel kell rendelkeznie az ún. autentikus feladatnak. A fő gondolat a ‘szimulációs’ elemekre való hivatkozás, vagyis a szöveges feladatok és az iskolán kívüli, valóságos helyzetek közötti párhuzam minősége: átfogó jelleg, hűség és reprezentativitás. Ezek a fogalmak *Fitzpatrick* és *Morrison* (1971) írásából származnak, akiknek munkája rendszerszintű értékelési célból készült.

*Palmnak* az autentikus feladatok kategorizálására vonatkozó megközelítését a finn és svéd nemzeti értékelési feladatok elemzése is alátámasztotta. Bár ezek a feladatok felső középiskolás diákok számára készültek, bizonyos tanulságok levonhatók az alsóbb osztályok számára is. Kimutatták, hogy a nemzeti értékelésben szereplő szöveges feladatok 50%-ában olyan esemény szerepelt, amely előfordulhat iskolán kívüli összefüggésben, és olyan kérdést tartalmazott, amely az adott esetben ‘reálisan’ feltehető. Ez a két külső feladatjellemző határozottan arra utal, hogy a szöveges feladat autentikus megalkotására tett kísérletünk és az autentikusság – ahogy más taxonómiák is megfogalmazzák – a diákok valós matematikai modellezési folyamataihoz kapcsolódik.

A szöveges feladatok taxonómiájának felállítására tett kísérletünk az alkalmazott matematikai ismeretek szempontjából szükségképpen figyelembe veszi egyrészt a szöveges feladatok jellemzőit, másrészt a mentális folyamatok jellemzőit, amelyek a szövegesfeladat-megoldási folyamatokban felszínre kerülnek. Négy feladatkategóriára teszünk javaslatot oly módon, hogy együtt egy 2+2-es rendszert formálnak. Két olyan szövegesfeladat-kategória van, amelyeknél nincs szükség a feladatszituációk valódi matematikai modellezésére, és van két kategória (realisztikus és autentikus), amelyek a valódi matematikai modellezésre utalnak. *Galbraith* és *Stillman* (2001) megállapításaival összhangban a valódi modellezési feladatok olyan problémák, amelyekben legalább egy komplex modellezési lépés található, ezért a feladatmegoldó nem tudja közvetlenül megfogalmazni, megérteni, matematikailag reprezentálni, megoldani, interpretálni és megválaszolni a problémát ugyanolyan módon, ahogy azt egy prototípus vagy pszeudo-realisztikus feladat esetén tenné.

### *Tisztán matematikai szimbólumokat tartalmazó, „szöveg nélküli feladatok”*

*Berends* és *van Lieshout* (2009) szöveges feladatokkal kapcsolatos taxonómiájában, amely nevezéktanban döntő szempont, hogy a feladatok esszenciális, ill. irreveláns részként tartalmaznak-e rajzokat, szerepel a „csupasz feladat” (bare task) kifejezés. Abban a nevezéktanban ez a rajzok szerepeltetésének hiányát jelentette. Jelen esetben „szöveg nélküli feladatnak” nevezzük a tisztán matematikai szimbólumokat tartalmazó feladatokat, amelyekben legföljebb egy formális utasítás szerepel arra vonatkozóan, hogy mit kell csinálni, vagy hogyan kell a feladatot megoldani (pl., „10 + 26 = ?”). Ez a kategória elegendő és szükséges kiindulópont annak meghatározásához, hogy mely feladatok azok, amelyeknek kevés közük van a matematika alkalmazásához. A tisztán matematikai szimbólumokat tartalmazó feladatok – vagy az „oldd meg az egyenletet” típusú utasítások – általában nem kapcsolódnak a tanulók alkalmazott problémamegoldásához, illetve a matematikai modellezéshez. Vegyük azonban figyelembe, hogy még a szöveg nélküli feladatok is megfelelő eszközök a matematikai modellezés fejlesztésére, amikor a feladatmegoldás fordított módját alkalmazzuk, vagyis amikor a tanulónak megtanítják, hogyan fogalmazza meg a szöveges feladatot a tisztán szimbólumokkal megadott matematikai struktúrából.

Az ilyen típusú feladatok általában részei a mindennapi osztálytermi gyakorlatnak, és a feladatok megoldásának képessége is részét képezi a tantervi céloknak. E szöveg nélküli feladatok és a másik három kategória feladatai közötti lehetséges éles disztinkció felfedezhető a törtek megértésében és megtanulásában (*Mack*, 1990).

Nem akarjuk azt a benyomást kelteni, hogy a szöveg nélküli feladatok önmagukban könnyebbek, mint a kontextusba ágyazott feladatok. Éppen ellenkezőleg, bizonyos esetekben a gyerekek jobban teljesítenek a szöveges feladatok, mint a matematikailag izomorf, csupasz feladatok esetében. Ezt több szerző is hangsúlyozta és dokumentálta (*Carpenter*, *Moser*, és *Bebout*, 1988; *De Corte* és *Verschaffel*, 1981).

## *Prototípus és pszeudo-realisztikus szöveges feladatok*

Ahogy a korábbi részben már tárgyaltuk, az osztálytermi oktatás gyakran használja, ill. támaszkodik az ún. prototípus példákra. Ezek a feladatok csontvázra húzott szöveges feladatok, amelyek egy matematikai művelet, vagy más matematizálási folyamat reprezentánsainak tekinthetők. A prototípus példákat Magyarországon sokszor nevezik „zöld kályha” feladatoknak vagy tanpéldáknak, ahonnan kiindulva analógiák hozhatók létre és fedezhetők fel. A prototípus példákat matematikai szöveges feladatként határozzuk meg, amelyek feladata egy adott matematikai művelet (például szorzás), illetve egy matematikai képlet vagy megoldási séma (pl. a „hármas szabály”) felismerésének és használatának megtanítása. Ezeknél a feladatoknál nagyon gondosan választják meg és állítják össze a tartalmat annak ismerős és prototípusos jellege miatt, de ennek a tartalomnak a realisztikusság szempontból nincs különleges jelentősége vagy szerepe.

Természetesen a prototípus példákból való tanulás hatékony eszköz lehet a tanulók matematikai képességeinek fejlesztésében, de fennáll a potenciális veszélye az ún. racionális hibák elkövetésének (*Ben-Zeev*, 1995) akkor, ha a tanulók a prototípusnak megfelelő mély struktúrák és megoldási folyamatok átvitele helyett a felületes hasonlóságokra támaszkodnak. (Például a gyenge tanulók a szöveges feladatokat inkább tartalmuk és kontextusbeli jellemzőik alapján kategorizálják, pl. ‘életkori különbség feladatok’, ‘zászlószínezési feladatok’ stb., annak ellenére, hogy matematikai szempontból nincs közös jellemzőjük.)

Sok szöveges feladat megértése és megoldása függ a „prototípusosság hallgatólagosan elfogadott értelmezési szabályaitól és a sokféle hipotézistől” (*Greer*, 1997, 297. o.) *Hong* (1995) szerint a jó feladatmegoldó képességű 6. osztályos tanulók már a feladatmegoldás korai szakaszában, vagyis már a feladat első olvasásakor képesek kategorizálni a szöveges feladatokat. *Jonassen* (2003) széles körű áttekintést nyújtott a szöveges feladatok tanulók általi kategorizálásának, (félre)kategorizálásának szakirodalmáról. Ezen tanulmányok lényege, ahogyan az feltételezhető volt, hogy a sikeres feladatmegoldók a szöveges feladatokat (matematikai) strukturális jellemzőik alapján, míg a gyengén teljesítők inkább a felszínes (ill. szituációs) jellemzők alapján kategorizálják (lásd *Jonassen*, 2003; *Verschaffel*, *De Corte* és *Lasure*, 1994). Nem elsősorban a feladat tartalma az, ami az ilyen felületes stratégiákat kiváltja, hanem inkább a tanártól (és az iskolarendszer egyéb szereplőitől) kapott visszajelzések a stratégiák alkalmazásának kielégítő voltáról. Sok tanár négy, illetve öt lépésből álló feladatmegoldó stratégiát tanít, amelyekkel sikeresen megoldhatók a szöveges feladatok (pl. a megfelelő adatok összegyűjtése, a szükséges műveletek megnevezése, a művelet végrehajtása, a megoldás hangsúlyozása). Az ilyen stratégiák tanítása csak akkor üdvözlendő, ha e stratégiák értelmessége, valamint rugalmassága (illetve adaptivitása) fenntartható.

### *Realisztikus szöveges feladatok*

A tanulók realisztikus szövegesfeladat-megoldását a korábbi hagyományos módokhoz képest rugalmasabban és dinamikusabban kell értékelni (*Streefland* és *van den Heuvel-Panhuizen,* 1999).

A „realisztikus" fogalmat a holland RME definíciója szerint használjuk. Egy realisztikus feladat esetében a tanulóktól elvárják (és sok esetben megkövetelik), hogy mentális reprezentációikat és modelljeiket a feladat megértésére és megoldására használják. Felhívjuk a figyelmet, hogy a realisztikus fogalom a mentális képekre vonatkozik, amelyek a feladat megfelelő reprezentációjának eszközei. A mentális képek aktiválása és használata azonban nem szükségképpen jelenti azt, hogy a feladat realisztikus. *Cobb* (1995) értelmezése szerint két kétszámjegyű szám összeadásához a tanulónak nem kell szituációs képeket mozgósítania, noha bizonyára használ képeket az összeadási folyamatban. A realisztikus és pszeudo-realisztikus szöveges feladatok megkülönböztetésében a szituációspecifikus képek fogalma lehet a segítségünkre.

Hogyan különböztessük meg a realisztikus szöveges feladatokat a prototípusos, illetve a pszeudo-realisztikus feladatoktól? Egyetértünk *Hiebert* és mtsai (1996) megállapításával, hogy önmagában egyetlen feladat sem lehet rutin jellegű vagy problematikus. Egy feladat annyira válik problematikussá, amilyen mértékben és eszközökkel problematikusként kezeljük. Ugyanígy, egy szöveges feladat annyiban válik realisztikussá, amennyiben képessé teszi a tanulókat a valódi világban szerzett tapasztalataikon alapuló mentális képeiknek az alkalmazására. *Inoue* (2008) azt ajánlja, hogy segítsük a tanulókat, hogy problémamegoldásban képesek legyenek helyesen felhasználni mindennapi tapasztalataikat. Ez megtehető úgy, hogy kevesebb szöveges korlátot építünk be, hogy a tanulónak gazdagabb lehetőséget biztosítsunk a feladat képzeletbeli felépítésére. Ez összhangban van *Reusser* (1988) megfigyelésével, aki a különböző szöveges és kontextuális megfogalmazásokat túlságosan segítőnek találta a problémamegoldási folyamatra való felkészülésben. Például, a tanulók túl sokszor hiszik azt, hogy a helyes úton járnak, ha a megoldási folyamat simán megtörténik (pl. az osztás maradék nélkül elvégezhető).

A realisztikus szöveges feladatok általában relatíve hosszabb szövegűek, mint a prototípus vagy pszeudo-realisztikus feladatok. Ezt *Larsen* és *Zandieh* (2008) is igazolta algebrai feladatok esetében, ahol szükségesnek találták a szituáció szöveges magyarázatát – amikor a tétel egy realisztikus kontextusba van helyezve. Azonban a feladat szövegének hossza önmagában nem kritérium.

Egy szöveges feladat realisztikusságának általános kritériuma az alábbi kritériumokat tartalmazza: a feladat egy adott korcsoportban, a tanulók többségénél a megoldás horizontális matematizálási és valós modellezési elemeket tartalmazó mentális folyamatokat igényel, amelyek túllépnek a korábban megtanított és jól elsajátított műveletek, megoldási sémák és módszerek puszta alkalmazásán. A realisztikus szöveges feladatok lehetővé teszik, hogy a feladatszituációra különböző mentális modelleket építsenek fel. Ezek a modellek a mentális számsoroktól a négyzet vázlatos felrajzolásáig terjedhetnek.

Illusztráljuk ennek a kritériumnak a működését egy *Gravemeijer* (1997) által összeállított feladattal:

*Marco megkéri édesanyját, hogy barátja, Pim maradhasson vacsorára. A mama beleegyezik, de ez azt jelenti, hogy egy sajtburgerrel kevesebb van. Öt sajtburger van, de Pimmel együtt most már hatan vannak. Hogyan osztanál el öt sajtburgert hat ember között?*

*Gravemeijer* megjegyzi, hogy a hétköznapi életben ennek a helyzetnek több praktikus megoldása lehet: például Marco megosztja sajtburgerét a barátjával, a papa és a mama osztozik egy sajtburgeren, vagy valaki elmegy venni még egy sajtburgert. Természetesen a matematikaórán, ahol az elmúlt évtizedekben született valamennyi elmélet alkalmazási terepre talál (a bourdieu-i „gyakorlati érzék”, szocio-matematikai normák, matematikai meggyőződések, a bernsteini oktatási kódok), aligha javasolná bárki a fenti három, renegát megoldást, kivéve azokat, akik nem érzik magukat eléggé kompetensnek az osztás jellegű feladatokban. Feltételezhetjük, hogy több első és második osztályos gyerek fog renegát, kontextuális választ adni, mint az idősebbek. Felsőbb szinten remélhetőleg a 7. és 8. osztályos tanulók többsége képes elosztani az 5-öt 6-tal a fenti feladatban, anélkül, hogy szituációtól függő képzeteket kellene mozgósítaniuk. Ezért ez a „sajtburger-feladat” realisztikus feladat lehet a 3-6. osztályosok számára, elvárva tőlük, hogy aktivizálják a helyzettel kapcsolatos képzeletüket, és megtalálják a megoldás megfelelő matematikai modelljét. Az idősebb gyerekeknél a feladat prototípusos szöveges feladatnak tűnhet, mivel ők képesek az 5-öt elosztani 6-tal, függetlenül attól, hogy a problémafelvetésben milyen konkrét tárgyak szerepelnek.

Az irodalomban hasznos gondolatokat találunk arra vonatkozólag, hogy egy szöveges feladat hogyan válhat realisztikussá. *Boaler* (1994) szerint a tanulók sokszor nem látják az összefüggést a különböző kontextusokban bemutatott matematikai szituációk között, és ennek az oka a matematikaórán használt (pszeudo-realisztikus) kontextus. Javasolja a szöveges feladatok gondos megválasztását és megfogalmazását, hogy a tantermi tudás transzferálható legyen a mindennapi életre. A valós életből vett helyzeteknek a szöveges problémákba való puszta átmásolása nem elfogadható. Az alábbi példa segítséget nyújthat annak tisztázására, hogy milyen lehet az a szöveges feladat, amely megkönnyíti a tanulók számára a mindennapi életben szerzett tapasztalataikból nyert ismeretek átvitelét.

*De Lange* (1993, 151. o.) egy Illinois állambeli tesztből idézett egy példát:

*Kathy 40 c*[1]*-ért vásárolt gesztenyét. June 8 uncia*[2] *gesztenyét vett. Melyik lány vett több gesztenyét?*

*a) June*

*b) Mindketten egyforma mennyiséget vettek*

*c) Kathy kétszer annyit vett*

*d) Kathy egy unciával többet vett*

*e) Nem lehet megmondani*

*De Lange* szerint ez egy csodálatra méltó kezdeményezés, mivel a probléma megoldásához a tanulónak egy megfelelő mentális szituációs modellt kell készítenie, míg az olyan általános stratégiák alkalmazására irányuló minden kísérlet, mint az „adatkeresés, a megfelelő művelet ki-

1 c = cent, azaz 40 cent = 0.4 USD.

2 8 uncia az fél font, vagyis kb. 22,7 dkg

választása, számítás elvégzése" kudarcra van ítélve. Ebben az esetben az elvárt helyes válasz az, hogy „nem lehet megmondani", hiszen a számszerű adatokból nem következik közvetlen számszerű válasz. *De Lange* azonban a feladat továbbfejlesztését ajánlja oly módon, hogy akár minden opció igaz lehessen, és a tanulónak kelljen meghatároznia a feladat azon feltételeit, amelyek esetén az opciók valóban igazak. Mindezekből az is következik, hogy a feladat formátumának megváltoztatása is realisztikussá tudja tenni a feladatkitűzést: sokszor a feladat nyitottsága tesz egy szöveges feladatot realisztikussá.

*Treffers* (1993) példaként újságból vett szemelvényeken mutatta be, hogy a gyerekek hogyan próbálják elfogulatlanul megoldani a szöveges matematikafeladatokat. Negyedik osztályos gyerekek kapták meg azt a szöveget, hogy „átlagosan heti 220 órát dolgozom", a kérdés az volt, hogy lehetséges-e heti 220 órát dolgozni. A gyerekek nem matematizálták rögtön a problémát, és különböző típusú válaszokat adtak. A realisztikus matematikafeladatok egyik fontos jellemzője, hogy nyitott kérdésfeltevéssel ösztönzi a sokféleséget.

A korábbi előfeltevésekkel ellentétben, *Inoue* (2008) arra figyelmeztet, hogy az ismerős, barátságos problémahelyzetek alkalmazásából csak korlátozottan származnak előnyök. Továbbá a feladatkontextus ismerős volta összefüggésben van a matematikai tartalommal és a gondolkodási folyamat elvárt szintjével (*Sáenz*, 2009). Nyílt végű kérdések például gyakrabban kapcsolódnak a magasabb szintű gondolkodási képességekhez. Így a matematikai értékelési keretek három dimenziója (diszciplináris tartalom, alkalmazott matematikatudás, matematikai gondolkodási képességek) szorosan összekapcsolódnak, lehetővé téve, hogy az alkalmazási dimenziót relatíve különálló, de más értékelési dimenziók kategóriáiba beágyazott értékelési dimenzióként kezeljük.

## *Autentikus szöveges feladatok*

A szöveges feladatok negyedik típusát autentikus feladatoknak nevezzük. Bár világosan kell látnunk, hogy a realisztikus és autentikus fogalmak nagyon közel állnak egymáshoz, a realisztikus szöveges feladatok egy adott részhalmazának jellemzésére indokoltnak tűnik az „autentikus" jelző használata. A szöveges matematikai feladatokkal foglalkozó szakirodalom különböző összefüggésekben használja az ‘autentikus’ kifejezést. *Palm* definícióját elfogadva, az autentikusságnak több fokozata van, és kifejezi az iskolai feladatok és a mindennapi életből vett helyzetek közötti kapcsolatot. Ha „egy iskolai feladat … jól mintázza a valós életet” (*Palm*, 2008, 40. o.), azt a feladatot autentikusnak nevezhetjük. *Kramarski*, *Mevarech* és *Arami* (2002) ugyanakkor a feladatmegoldás szemszögéből közelítették az autentikusság problémáját. Ők azt a matematikafeladatot nevezik autentikusnak, amelynek a megoldási módja előre nem ismert, vagy nincsenek kész algoritmusok. A fogalom harmadik definícióját *Garcia*, *Sanchez* és *Escudero* (2007) adják, akik autentikus tevékenységről beszélnek, azaz a feladatnak a valóságos szituációhoz való viszonyításáról.

Önmagában egyetlen feladat sem tekinthető sem autentikusnak, sem nem-autentikusnak (hasonlóan a realisztikus, ill. nem-realisztikus ellentétpárnál is hiányzó distinkcióhoz), ezért ha az a célunk, hogy egy értékeléshez hasznos kategóriákat adjunk, a fent említett három definíció nem egyformán használható. Ami az első definíciót illeti, a mindennapi életből vett helyzet követése az autentikusság szempontjából két dologra utalhat. Először is, a követés mértéke függhet a szöveges kidolgozástól, ill. a feladat megfelelő kontextusának megteremtésétől (pl. a szituáció eljátszása). Másodszor, a tanulók között jelentős különbségek lehetnek a tekintetben, hogy az adott szituáció mennyire ismerős (tehát valós életből vett) a számukra. A második definíció még nyilvánvalóbbá teszi az egyéni különbségeket (Kinek számára nem ismert a megoldás módszere?). A harmadik megközelítés közelebb áll a horizontális matematizálás fogalmához, amelyet a holland realisztikus mozgalom kapcsán tárgyaltunk. Összességében, pedagógiai értékelési szempontból *Palm* definíciójának alkalmazását javasoljuk, hangsúlyozva az átfogó szöveges megfogalmazás szükségességét a mindennapi életből vett szituációk „emulálása” (utánzása) érdekében.

Pedagógiai értékelési szempontból az autentikus feladatok jellemzői és követelményei két szempont mentén foglalhatók össze. Először is az autentikusságnak általában meg kell követelnie az eltávolodást a hagyományos, egyéni papír-ceruzás módszertől az autentikusabb beállítódás felé, ami jelentheti például a különböző információforrásokra épülő feladatok csoportmunkában történő megoldását. Másodszor, a hagyományos papír-ceruza formátumú autentikus feladatok hosszabb szövegűek, mivel az átláthatatlan problématerületek leírása hosszabb mondatokat eredményez. Ezek a hosszabb mondatok segítenek a hiányzó információ megszerzésében, de felesleges részleteket is tartalmaznak, ezáltal is utánozva a valós életet. Emellett sok autentikus feladat tartalmaz fotókat, táblázatokat, grafikonokat, rajzokat stb. Sőt, az autenticitás egyfajta feladatmegoldó magatartásra és tanulói tevékenységre utal.

Érdemes szem előtt tartani, hogy az autentikusság mint a valós élet eseményeit és helyzeteit tükröző, ill. leképező eszköz aligha elérhető (sőt, inkább utópiának tartjuk), mivel az iskolai kontextus és a mindennapi élet kontextusa alapvetően különbözik egymástól (*Depaepe*, *De Corte* és *Verschaffel*, 2009). Az ún. realisztikus és autentikus feladatok nem mindig a matematikatudást és annak a valós élethelyzetekhez való viszonyát mérik, hanem inkább a 'gyakorlati érzék' (feel for the game) hozzáállást, ahogy azt a „Szocio-matematikai normák …" c. részben elemeztük. Bár a 'gyakorlati érzék' hozzáállás értékes kifejezője lehet az egyéni teljesítménynek, de mivel teljesen eltérő mentális reprezentációk esetén is megszülethet ugyanaz a (helyes) válasz egy olyan feladatra, amely a matematikatudás mindennapi kontextusban való alkalmazásának mérésére készült, *Cooper* (1994) arra figyelmezteti a politikusokat és a kutatókat, hogy

> *„[a matematikai ismeretek mindennapi kontextusban való értékeléséről szerzett] eddigi angol tapasztalatok azt sugallják, hogy jóval hosszabb időre van szükség ahhoz, hogy a kutatási eredmények és tapasztalatok nagyobb szerepet játsszanak, a tesztek kidolgozásába pedig a politika ne avatkozzon be."* (*Cooper,* 1994. 163. o.)

*Hiebert* és mtsai (1996, 10. o.) szerint „az, hogy milyen mértékben tekinthető egy feladat problémának, sokkal inkább függ a tanulóktól és az osztálytermi kultúrától, mint magától a feladattól". Egy olyan feladat, amely az egyik osztályban rutin feladatnak számít, problematikus lehet a másikban, és „reflektív vizsgálódást" igényelhet, míg „egy más kulturális közegben még a nagyszabású, mindennapi életből leírt szituációk is megfoszthatók problematikus jellegüktől. *A feladatok önmagukban sem nem problematikusak, sem nem rutin jellegűek"* (10. o. – kiemelés tőlünk).

Összefoglalóan, az alábbi jellemzők általában autentikus feladatokra vonatkoznak:

(1) A mindennapi élet eseményeit leképező részletes (sokszor hosszadalmas) leírások.

(2) A megoldás a szituáció valódi matematikai modellezését igényli.
(3) A megoldási folyamathoz sokszor ún. ’autentikus tevékenységre’ van szükség, pl. különböző módszerekkel végzett további adatgyűjtésre (mérés, becslés, a témával kapcsolatos előzetes ismeretek megvitatása).
(4) A diákokat sok esetben biztatják a problémafelvetésre és a kérdezésre mind az adott szöveges feladattal, mind pedig saját mindennapi életből vett tapasztalataikkal kapcsolatban.

## Összegzés

Bár a tisztán aritmetikai feladatoknak és a prototipikus szöveges feladatoknak még mindig fontos helyük van az általános iskolai matematikaoktatásban és értékelésben, ezeket az eddigieknél jobban ki kell egészíteni realisztikusabb és autentikusabb típusú feladatokkal. Ez utóbbiak ígéretes eszköznek bizonyultak a szöveges feladatok „alkalmazási funkciójának” megvalósításában, mivel olyan lehetőséget nyújtanak a mindennapi élet mennyiségi szituációihoz, amelyben a matematikát tanulóknak szükségük van arra, amit a matematikaórán tanultak.

Természetüknél fogva a realisztikus és autentikus feladatok nagyobb mértékben nyújtanak olyan tanulási tapasztalatot, amely arra ösztönzi a tanulókat, hogy matematikai ismereteiket más tantárgyi területeken, például a (társadalom)tudományok terén és a mindennapi életben szerzett ismereteikkel együtt használják fel értelmes szituációs és matematikai modellek felépítésére és ésszerű, logikus megoldások elérésére. Ugyanakkor az autentikus és realisztikus feladatok – alapvetően nem rutinjellegű, kihívást jelentő és nyitott, a (heurisztikus) feladatmegoldó stratégiák kidolgozására és a metakognitív készségek fejlesztésére rengeteg lehetőséget kínáló természetüknél fogva – tudástranszfert biztosítanak más tantárgyi és iskolán kívüli területekre, amennyiben megfelelő oktatási módszerekkel használjuk fel őket, értve ezalatt a kontextusfüggetlenséget és az általánosításra törekvést. Ezen túlmenően számos lehetőség rejlik bennük a matematikáról és annak a való világhoz való viszonyáról alkotott helytelen nézet és káros attitűd leépítésére.

Az értékeléssel kapcsolatos egyik fontos, de nehéz kérdés, hogyan tegyük világossá a tanulók számára, hogy mit várunk el tőlük – a realisztikusság és a precizitás tekintetében – egy konkrét értékelési helyzetben. Elvileg a matematikai modell absztrakciós fokának és pontosságának a kérdése azon múlik, hogy szándékaink szerint a tanuló megtanuljon jó döntéseket hozni, és megfelelő hozzáállás alakuljon ki benne a realisztikus matematikai modellezés és az alkalmazott problémamegoldás felé. Egy szokásos matematikaóra keretében, ahol a vita és az együttműködés megengedett, sőt támogatott, a precizitás, a feltevések ésszerűsége mind megbeszélhető (*Verschaffel,* 2002). A realisztikusság és a pontosság tekintetében fennálló bizonytalanságok és nehézségek azonban, véleményünk szerint sokkal komolyabbak, ha a problémák vitát kizáró környezetben kerülnek felvetésre, különösen írásbeli tesztek esetén, ahogy azt a fentiekben, *Cooper* (1994; *Cooper* és *Dunne*, 1998) munkáinak tárgyalásánál láthattuk. Ezért ha a pedagógiai értékelésbe több realisztikus és autentikus problémát szeretnénk bevonni, ahogyan ezt a fentiekben javasoltuk, arra is oda kell figyelnünk, hogyan tegyük – explicite vagy implicite – világossá a tanuló számára az adott értékelési helyzet „játékszabályait".

## Irodalom

Adey, P., Csapó, B., Demetriou, A., Hautamäki, J. és Shayer, M. (2007): Can we intelligent about intelligence? Why education needs the concept of plastic general ability. *Educational Research Review*, **2**. 2. sz. 75–97.

Aiken, L. R. (1970): Attitudes towards mathematics. *Review of Educational Research*, **40**. 4. sz. 551–596.

Barnes, H. (2005): The theory of Realistic Mathematics Education as a theoretical framework for teaching low attainers in mathematics. *Pythagoras*, **61**. 42–57.

Baumert, J., Lüdtke, O., Trautwein, U. és Brunner, M. (2009): Large-scale student assessment studies measure the results of processes of knowledge acquisition: Evidence in support of the distinction between intelligence and student achievement. *Educational Research Review*, **4**. 165–176.

Ben-Zeev, T. (1995): The nature and origin of rational errors in arithmetic thinking: Induction from examples and prior knowledge. *Cognitive Science*, **19**. 341–376.

Berends, I. E. és van Lieshout, E. C. D. M. (2009): The effect of illustrations in arithmetic problem-solving: Effects of increased cognitive load. *Learning and Instruction*, **19**. 4. sz. 345–353.

Boaler, J. (1994): When do girls prefer football to fashion? A analysis of female underachievement in relation to 'realistic' mathematics context. *British Educational Research Journal*, **20**. 5. sz. 551–564.

Boaler, J. (2009): Can mathematics problems help with the inequities of the world? In: Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. és Mukhopadhyay, S. (szerk.): *Words and* *worlds: Modelling verbal descriptions of situations.* Sense Publications, Rotterdam. 131–139.

C. Neményi Eszter, Radnainé Szendrei Julianna és Varga Tamás (1981): Matematika 5–8. In: Szebenyi Péter (szerk.): *Az általános iskolai nevelés és oktatás terve.* 2. kiadás. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest.

Carpenter, T. P., Moser, J. M. és Bebout, H. C. (1988): Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**. 4. sz. 345–357.

Carraher, T. N., Carraher, D. W. és Schliemann, A. D. (1985): Mathematics in streets and schools. *British Journal of Developmental Psychology*, **3**. 21–29.

Clements, D. H. (2008): Linking research and curriculum development. In: English, L. D. (szerk.): *Handbook of International Research in Mathematics Education*. 2nd edition. Routledge, New York. 589–625.

Cobb, J. (1995): Cultural tools and mathematical learning: A case study. *Journal for Research in Mathematics Learning*, **26**. 4. sz. 362–385.

Cooper, B. (1994): Authentic testing in mathematics? The boundary between everyday and mathematical knowledge in National Curriculum testing in English Schools. *Assessment in Education: Principles, Policy és Practice*, **1**. 2. sz. 143–166.

Cooper, B. és Dunne, M. (1998): *Sociological Review*, **46**. 1. sz. 115–148.

Csapó Benő (2000): A tantárgyakkal kapcsolatos attitűdök összefüggései. *Magyar Pedagógia*, **100**. 3. sz. 343–366.

Csíkos Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megoldásának problémái 10-11 éves tanulók körében. *Magyar Pedagógia*, **103**. 1. sz. 35–55.

Davis-Dorsey, J., Ross, S. M. és Morrison, G. R. (1991): The role of rewording and context personalization in the solving of mathematical word problem solving. *Journal of Educational Psychology*, **83**. 1. sz. 61–68.

De Corte, E. és Verschaffel, L. (1981): Children's solution processes in elementary arithmetic problems: Analysis and improvement. *Journal of Educational Psychology*, **58**. 6. sz. 765–779.

De Lange, J. (1993): Between end and beginning: Mathematics education for 12–16 year olds: 1987–2002. *Educational Studies in Mathematics*, **25**. 1–2. sz. 137–160.

Depaepe, F., De Corte, E. és Verschaffel, L. (2009): Analysis of the realistic nature of word problems in upper elementary mathematics education. In: Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. és Mukhopadhyay, S. (szerk.): *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations.* Sense Publications, Rotterdam. 245–264.

Doorman, L. M. és Gravemeijer, K. P. E. (2009): Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. *ZDM Mathematics Education*, **41**. 1–2. sz. 199–211.

Elbers, E. és de Haan, M. (2005): The construction of word meaning in a multicultural classroom. Mediational tools in peer collaboration during mathematics lessons. *European Journal of Psychology of Education*, **20**. 1. sz. 45–59.

Eriksson, G. (2008): Arithmetical thinking in children attending special schools for the intellectually disabled. *Journal of Mathematical Behavior*, **27**. 1. sz. 1–10.

Ernest, P. (1999): Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: Philosophical and rhetorical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, **38**.1–3. sz. 67–83.

Fitzpatrick, R. és Morrison, E. J. (1971): Performance and product evaluation. In: Thorndike, R. L. (szerk.): *Educational measurement*, American Council on Education, Washington, DC. (2. kiadás) 237–270.

Freudenthal, H. (1991): *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Galbraith, P. és Stillman, G. (2001): Assumptions and context. Pursuing their role in modelling activity. In: Matos, J. F., Blum, W., Houston, S. K. és Carreira, S. P. (szerk.): *Modelling and mathematics education. ICTMA 9: Applications in science and technology.* Horwood, Chichester, U. K. 300–310.

Garcia, M., Sanchez, V. és Escudero, I. (2007): Learning through reflection in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, **64**. 1. sz. 1–17.

Gravemeijer, K. (1994): Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, **25**. 5. sz. 443–471.

Gravemeijer, K. (1997): Solving word problems: a case of modelling? *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 389–397.

Gravemeijer, K. és Doorman, M. (1999): Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, **39**. 1. sz. 111–129.

Gravemeijer, K. és Terwel, J. (2000): Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, **32**. 6. sz. 777–796.

Greer, B. (1997): Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 293–307.

Guy, R. K. (1981): *Unsolved problems in number theory*. Springer–Verlag: New York – Heidelberg – Berlin.

Henningsen, M. és Stein, M. K. (1997): Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* **28**. 5. sz. 524–549.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. és Wearne, D. (1996): Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher*, **25**. 4. sz. 12–21.

High Level Group on Science Education (2007): *Science ducation now: A renewed pedagogy for the future of Europe*. European Commission: Brussels.

Hodgson, T. és Morandi, P. (1996): Exploration, explanation, formalization: A three-step approach to proof. *Primus*, **6**. 1. sz. 49–57.

Hong, E. (1995): Mental models in word problem-solving: A comparison between American and Korean sixth-grade students. *Applied Cognitive Psychology*, **9**. 123–142.

Inoue, N. (2008): Minimalism as a guiding principle: Linking mathematical learning to everyday knowledge. *Mathematical Thinking and Learning*, **10**. 1. sz. 36–67.

Jitendra, A. K., Griffin, C. C., Deatline-Buchman, A. és Sczesniak, E. (2007): Mathematical word problem solving in third-grade classrooms. *The Journal of Educational Research*, **100**. 5. sz. 283–302.

Jitendra, A. K., Sczesniak, E. és Deatline-Buchman, A. (2005): An exploratory validation of curriculum-based mathematical word problem-solving tasks as indicators of mathematical proficiency for third graders. *School Psychology Review*, **34**. 3. sz. 358–371.

Jonassen, D. H. (2003): Designing research-based instruction for story problems. *Educational Psychology Review*, **15**. 3. sz. 267–296.

Keijzer, R. és Terwel, J. (2003): Learning for mathematical insight: a longitudinal comparative study of modelling. *Learning and Instruction*, **13**. 3. sz. 285–304.

Kintsch, W. (1985): Learning from text. *Cognition and Instruction*, **3**. 87–108.

Kintsch, W. és Greeno, J. G. (1985): Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, **92**. 109–129.

Klein, A. S., Beishuizen, M. és Treffers, A. (1998): The empty number line in Dutch second grades: realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, **29**. 4. sz. 443–464.

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappe (2009): *Rekenonderwijs op de Basisschool. Analyse en Sleutels tot Verbetering*. Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, Amsterdam.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R. és Arami, M. (2002): The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics*, **49**. 225–250.

Kroesbergen, E. H. és van Luit, J. E. H. (2002): Teaching multiplication to low math performers: Guided versus structured instruction. *Instructional Science*, **30**. 5. sz. 361–378.

Lampert, M. (1986): Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and Instruction*, **3**. 4. sz. 305–342.

Lampert, M. (1990): When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, **27**. 1. sz. 29–63.

Larsen, S. és Zandieh, M. (2008): Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, **67**. 3. sz. 205–216.

Lave, J. (1992): Word problems: a microcosm of theories of learning. In: Light, P. és Butterworth, G. (szerk.): *Context and cognition. Ways of learning and knowing* Lawrence Erlbaum Associates, London. 74–92.

Light, P. és Butterworth, G. (1992, szerk.): *Context and cognition. Ways of learning and knowing*. Lawrence Erlbaum Associates, London.

Linchevski, L. és Williams, J. (1999): Using intuition from everyday life in ‘filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics*, **39**. 1. sz. 131–147.

Mack, N. K. (1990): Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**. 1. sz. 16–32.

Maddy, P. (2008): How applied mathematics became pure. *The Review of Symbolic Logic*, **1**. 16–41.

Morales, R. V., Shute, V. J. és Pellegrino, J. W. (1985): Developmental differences in understanding and solving simple mathematics word problems. *Cognition and Instruction*, **2**. 1. sz. 41–57.

Oktatási Minisztérium (2007): *Nemzeti alaptanterv*. Oktatási Minisztérium, Budapest.

OECD (1999): *Measuring student knowledge and skills. A new framework for assessment*. OECD, Paris.

OECD (2003): *The PISA 2003 assessment framework – mathematics, reading, science, and problem solving knowledge and skills.* OECD, Paris.

OECD (2004): *First results from PISA 2003.*. OECD, Paris.
OECD (2006) A*ssessing scientific, reading and mathematics literacy. A framework for PISA 2006*. OECD, Paris.
Palm, T. (2008): Impact of authenticity on sense making in word problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, **67**. 1 sz. 37–58.
Palm, T. (2009): Theory of authentic task situations. In: Verschaffel, L., Greer, B., Van Dooren, W. és Mukhopadhyay, S. (szerk.): *Words and worlds: Modelling verbal descriptions of situations*. SensePublishers, Rotterdam. 3–19.
Pollak, H. O. (1969): How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, **2**. 393–404.
Radatz, H. (1983): Untersuchungen zum Lösen einglekeideter Aufgaben. *Zeitschrift für Mathematik-Didaktik*, **4**. 3. sz. 205–217.
Reusser, K. (1988): Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science*, **17**. 309–338.
Reusser, K. és Stebler, R. (1997): Every word problem has a solution – the social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 309–327.
Rickart, C. (1996): Structuralism and mathematical thinking. In: Sternberg, R. J. és Ben-Zeev, T. (szerk.): The nature of mathematical thinking: Lawrence Erlbaum Associates: Mahwah, NJ. 285–300.
Riley, M. S. és Greeno, J. G. (1998): Developmental analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognition and Instruction*, **5**. 1. sz. 49–101.
Sáenz, C. (2009): The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA): *Educational Studies in Mathematics*, **71**. 2. sz. 123–143.
Saxe, G. B. (1988): The mathematics of child street vendors. *Child Development*, **59**. 5. sz. 1415–1425.
Säljö, R. (1991a): Culture and learning. *Learning and Instruction*, **1**. 3. sz. 179–185.
Säljö, R. (1991b): Learning and mediation: Fitting reality into a table. *Learning and Instruction*, **1**. 3. sz. 261–272.
Schoenfeld, A. H. (1988): When good teaching leads to bad results: The disasters of "well taught" mathematics courses. *Educational Psychologist*, **23**. 2. sz. 145–166.
Smolarski, D. C. (2002): Teaching mathematics in the seventeenth and twenty-first centuries. *Mathematics Magazine*, **75**. 4. sz. 256–262.
Sriraman, B. és Törner, G. (2008): Political union / mathematics education disunion. Building bridges in European didactic traditions. In: English, L. D. (szerk.): *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2. kiadás). Routledge, New York. 656–690.
Stein, M. K., Remillard, J. és Smith, M. S. (2007): How curriculum influences student learning. In: Lester, F. K. (szerk.): *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. Information Age, Charlotte, NC. 319–369.
Sternberg, R. J. és Frensch, P. A. (1992): On being an expert: A cost-benefit analysis. In: Hoffman, R. R. (szerk.): *The psychology of expertise: Cognitive research and Empirical AI*. Springer Verlag, New York. 191–204.
Streefland, L. és van den Heuvel-Panhuizen, M. (1999): Uncertainty, a metaphor for mathematics education? *Journal of Mathematical Behavior*, **17**. 4. sz. 393–397.

Szendrei, J. (2007): When the going gets tough, the tough gets going problem solving in Hungary, 1970–2007: research and theory, practice and politics. *ZDM*, **39**. 5. sz. 443–458.

Treffers, A. (1993): Wiscobas and Freudenthal realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **25**. 1–2. sz. 89–108.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996): *Assessment and realistic mathematics education*. CD-β Press, Utrecht.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000): *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht University, Utrecht.

van den Huivel-Panhuizen, M. (2001a): Realistic Mathematics Education as work in progress. In: Lin, F. L. (szerk.): *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education*, Taipei, Taiwan. 1–43.

van den Huivel-Panhuizen, M. (2001b): The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **25**. 2–9.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003): The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, **54**. 1. sz. 9–35.

van Garderen, D. (2004): Reciprocal teaching as a comprehension strategy for understanding mathematical word problems. *Reading és Writing Quarterly*, **20**. 2. sz. 225–229.

van Garderen, D. (2007): Teaching students with LD to use diagrams to solve mathematical word problems. *Journal of Learning Disabilities*, **40**. 6. sz. 540–553.

Verschaffel, L. (2002): Taking the modeling perspective seriously at the elementary school level: promises and pitfalls (Plenary lecture): In: Cockburn, A. és Nardi, E. (szerk.): *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* School of Education and Professional Development, University of East Anglia, UK. Vol. 1. 64–82.

Verschaffel, L., De Corte, E. és Borghart, I. (1997): Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 339–360.

Verschaffel, L., De Corte, E. és Lasure, S. (1994): Realistic considerations in mathematical modelling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 339–359.

Verschaffel, L., Greer, B. és De Corte, E. (2000): *Making sense of word problems*. Swets és Zeitlinger, Lisse.

Wubbels, T., Korthagen, F. és Broekman, H. (1997): Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, **32**. 1. sz. 1–28.

Wyndhamn, J. és Säljö, R. (1997): Word problems and mathematical reasoning – a study of children's mastery of reference and meaning in textual realities. *Learning and Instruction*, **7**. 4. sz. 361–382.

Yackel, E. és Cobb, P. (1996): Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, **27**. 4. sz. 458–477.